

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a X-a

Trunchi comun
+
curriculum diferențiat

CAPITOLUL I. MULȚIMI DE NUMERE

1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE PUTERI ȘI RADICALI

1.1. RADICALUL DE ORDINUL n DINTR-UN NUMĂR REAL POZITIV,

$$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

Să analizăm următoarele situații-problemă.

1. Un teren de formă pătratică are aria egală cu 1600 m^2 (figura 1).

Câți metri are o latură a terenului?

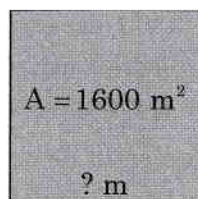


Figura 1

2. Un vas în formă de cub are volumul de 1000 dm^3 (figura 2).
Câți decimetri măsoară o latură a vasului?

3. Un grup de x copii inițiază un joc prin corespondență poștală. Fiecare copil trimite câte o scrisoare la x prieteni. Fiecare dintre aceștia expediază câte o scrisoare la alți x prieteni și așa mai departe. La a treia expediție s-au trimis 256 de scrisori. Câți copii au inițiat jocul?

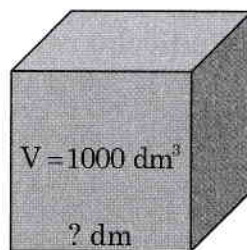


Figura 2

Pentru rezolvarea acestor probleme vom nota cu y și z elementele necunoscute în primele două probleme. Astfel, modelul matematic al acestora îl reprezintă ecuațiile:

$$y^2 = 1600, \quad z^3 = 1000, \quad \text{respectiv} \quad x^4 = 256 \quad \text{care se scriu sub forma}$$

$$y^2 - 1600 = 0 \quad (1), \quad z^3 - 1000 = 0 \quad (2), \quad \text{respectiv} \quad x^4 - 256 = 0 \quad (3).$$

Soluțiile lor se găsesc, în cazul de față, relativ ușor, anume $y = 40(\text{m})$, $z = 10(\text{dm})$, $x = 4(\text{copii})$.

Este important de observat faptul că soluția ecuației (1) reprezintă un număr real pozitiv a cărui putere a doua este 1600 și care se notează $\sqrt{1600}$, soluția ecuației (2) este un număr real pozitiv a cărui putere a treia este 1000, iar soluția ecuației (3) este un număr real pozitiv a cărui putere a patra este egală cu 256.

În general, este vorba de rezolvarea unei ecuații de forma $x^n - a = 0$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$.

Admitem fără demonstrație următorul enunț:

TEOREMA 1

Ecuția $x^n - a = 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a \in (0, +\infty)$ are o singură soluție reală pozitivă.

Cu alte cuvinte, teorema afirmă că pentru orice număr real pozitiv a și orice număr natural $n \geq 2$, există un unic număr real pozitiv a a cărui putere a n -a este egală cu a .

DEFINIȚIE

- Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv și $n \geq 2$ este un număr natural, se numește **radical de ordinul n din a** (sau rădăcină de ordinul n a lui a) numărul real pozitiv a cărui putere a n -a este egală cu a .

Radicalul de ordinul n din numărul pozitiv a se notează $\sqrt[n]{a}$ și verifică relațiile $\sqrt[n]{a} > 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ($a > 0$).

Numărul natural n se numește **ordinul (indicele) radicalului**.

Exemple

- $\sqrt[3]{9} = 3$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[4]{32} = 2$; $\sqrt[5]{729} = 3$;
 $\sqrt[10]{1024} = 2$.
- Soluțiile problemelor enunțate la începutul paragrafului se scriu sub forma:
 $y = \sqrt[3]{1600} = 40$ (m),
 $z = \sqrt[3]{1000} = 10$ (dm), $x = \sqrt[4]{256} = 4$ (copii).

OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

1. Dacă $a = 0$, prin definiție avem că $\sqrt[n]{0} = 0$.
2. Dacă ordinul n este 2, atunci pentru \sqrt{a} se folosește scrierea \sqrt{a} .
3. Pentru $n = 1$, ecuația $x^1 - a = 0$, $a > 0$ are soluția unică $x = a$. În spiritul definiției radicalului de ordin n , în acest caz se poate scrie $x = a = \sqrt[1]{a}$.
4. În determinarea numerelor de forma $\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, trebuie avut în vedere că indiferent de semnul lui x , $\sqrt{x^2} \geq 0$. Astfel, avem $\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{8^2} = 8 = |-8|$. Așadar, vom scrie $\sqrt{x^2} = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
Mai general, dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$.

$\sqrt[n]{}$

Radicalii au fost cunoscuți încă din antichitate. Babilonienii aveau tabele cu rădăcinile pătrate ale numerelor. Indienii (sec. IX) rezolvau ecuația de gradul doi și cunoșteau faptul că nu se poate calcula rădăcina pătrată a unui număr negativ.

Aceștia puteau calcula rădăcina de ordinul 3 cu ajutorul unor formule de aproximare.

Germanul Michael STIFEL (1487-1567) utiliza radicalul unui număr până la ordinul 7.

Christoph RUDOLF (sec. XVI) folosea următoarele simboluri: $\sqrt{}$ pentru $\sqrt[2]{}$; $\sqrt{\sqrt{}}$ pentru $\sqrt[4]{}$ etc.

Notăția actuală a radicalului $\sqrt{}$ apare din 1544 în lucrările lui Michael STIFEL.

Problemă rezolvată

☒ Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $E = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}$; b) $F = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2}$.

Soluție

a) E se scrie succesiv astfel: $E = |1 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1$.

b) $F = \sqrt{(x + 1)^2} - \sqrt{x^2} = |x + 1| - |x|$.

Tabloul de semn al expresiilor $x + 1$ și x este:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	-----	0	+++++	+++++
x	-----	0	+++++	+++++

Avem: $F = \begin{cases} -x - 1 + x, & x \in (-\infty, -1] \\ x + 1 + x, & x \in (-1, 0) \\ x + 1 - x, & x \in [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow F = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -1] \\ 2x + 1, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.

1.2. RADICALUL DE ORDIN IMPAR AL UNUI NUMĂR NEGATIV

☐ TEOREMA 2

Fie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a < 0$ un număr real negativ și ecuația $x^n - a = 0$ (1).

Atunci:

a) dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ ecuația nu are soluții reale;

b) dacă $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ ecuația are o singură soluție reală negativă.

Demonstratie

a) Presupunem prin absurd că există $\alpha \in \mathbb{R}$, soluție a ecuației.

Atunci $\alpha^{2k} = a$, ceea ce este fals deoarece $\alpha^{2k} \geq 0$ iar $a < 0$.

Așadar, ecuația (1) nu are soluții reale pentru $n = 2k$.

b) Notăm $x = -y$. Înlocuind în ecuația (1) se obține succesiv:

$$(-y)^{2k-1} - a = 0 \Leftrightarrow -y^{2k-1} - a = 0 \Leftrightarrow y^{2k-1} - (-a) = 0 \quad (2)$$

Deoarece $-a > 0$, conform teoremei 1 rezultă că ecuația (2) are o soluție unică pozitivă notată $y = \sqrt[2k-1]{-a}$. Așadar ecuația (1) are o soluție unică negativă și anume $x = -y = -\sqrt[2k-1]{-a}$. ■

- Dacă $a < 0$ este un număr real negativ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ este un număr impar, se numește **radical de ordin n din a** , numărul real negativ a cărui putere a n -a este egală cu a .

Pentru acesta se folosește notația $\sqrt[n]{a}$ și verifică relațiile:

$$\sqrt[n]{a} < 0, \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ și } \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}, (a < 0).$$

Exemple

- $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[9]{-512} = -2$; $\sqrt[5]{-243} = -3$.
- Ecuația $x^3 + 125 = 0$ are soluția reală negativă $x = \sqrt[3]{-125} = -5$.

REȚINEM!

Reflectând asupra definiției radicalului de ordinul n dintr-un număr pozitiv și a radicalului de ordin impar dintr-un număr negativ trebuie reținut că:

a) Radicalul de ordin par este definit numai din numere pozitive sau zero și este un număr pozitiv sau nul.

Așadar, dacă $a \geq 0$ există $\sqrt[2k]{a}$ și $\sqrt[2k]{a} \geq 0$, ($k \in \mathbb{N}^*$).

b) Radicalul de ordin impar se poate defini pentru orice număr real.

Așadar, $\sqrt[2k+1]{a} \in \mathbb{R}$ există pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Problemă rezolvată

☒ Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $E(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt[3]{x - 2}$;

b) $F(x) = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[3]{\frac{x + 3}{x - 1}}$.

Soluție

a) Pentru existența expresiei $E(x)$ se pune condiția de existență pentru fiecare radical. Astfel, radicalul de ordinul 2 există dacă $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$, iar radicalul de ordinul 3 există pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvând inecuația de gradul al doilea se obține soluția problemei

$$x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

b) Condițiile de existență pentru $F(x)$ sunt:

$9 - x^2 \geq 0$ și $x - 1 \neq 0$ (condiția de existență a fracției).

Se obține $x \in [-3, 3] \setminus \{1\}$.

APROXIMAREA UNOR NUMERE REALE SCRISE CU AJUTORUL RADICALILOR DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL

În ciclul gimnazial s-a învățat algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv, iar în clasa a IX-a s-au învățat modalități de aproximare rațională a numerelor reale.

Pentru numerele reale de forma $\sqrt[n]{a}$, $n \geq 3$ nu se studiază un algoritm de calcul a rădăcinii de ordin n a numărului a .

Dacă pentru numărul a se observă o scriere de forma $a = x^n$, atunci calculul lui $\sqrt[n]{a}$ se poate efectua mental, cu toate precauțiile de existență.

În caz contrar se apelează la un calculator dotat cu facilitatea acestui calcul sau se poate face o aproximare rațională așa cum se va indica prin exemplul de mai jos.

Problemă rezolvată

☒ Să se găsească o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-1} , respectiv 10^{-2} .

Soluție

Deoarece $1 = 1^3 < 2 < 2^3 = 8$, rezultă că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ și ca urmare 1, respectiv 2 sunt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos cu o eroare mai mică decât 1 ale numărului $\sqrt[3]{2}$.

Pentru a găsi aproximările raționale cu o eroare mai mică decât 10^{-1} ale numărului $\sqrt[3]{2}$ se procedează astfel:

Se scrie șirul de numere: 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

Se caută în acest șir două numere consecutive astfel încât cubul acestor numere să încadreze pe 2. Pentru o căutare mai eficientă se alege numărul din mijloc. Se obține $1,5^3 = 3,375 > 2$. Rezultă că perechea de numere căutată va fi printre numerele 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Calculăm $1,2^3 = 1,728$ care este mai mic decât 2 și ca urmare $1,1^3$ va fi de asemenea mai mic decât 2.

Calculăm $1,3^3 = 2,197 > 2$ și astfel am obținut că $1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3$.

\approx

Babilonienii aproximau numerele iraționale cu ajutorul mediilor aritmetice și geometrice. De exemplu, foloseau formule de genul

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

În Mesopotamia, în unele probleme apar aproximări de forma:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{25}{60} \approx 1,41$$

$$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{45}{60} = 1,75$$

$\sqrt[3]{2}$

Numărul $\sqrt[3]{2}$ apare în problema celebră numită „duplicarea cubului”: „fînd dat un cub cu latura 1, să se construiască cubul care are volumul dublu”.

V
1

2V
 $\sqrt[3]{2}$



Așadar, 1,2 și 1,3 sunt aproximările raționale prin lipsă, respectiv prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-1} ale numărului real $\sqrt[3]{2}$.

Pentru a obține aproximări raționale cu o eroare mai mică decât 10^{-2} se consideră șirul de numere: 1,21; 1,22; 1,23; 1,24; 1,25; ...; 1,29.

Se procedează ca la cazul anterior și se găsește că $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$, iar aproximările căutate sunt 1,25 respectiv 1,26.

Procedeeul poate continua pentru a găsi aproximări raționale ale lui $\sqrt[3]{2}$ cu o eroare oricât de mică se vrea.

EXERCIIII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze:

- a) $\sqrt{2^6}$, $\sqrt[4]{4^{12}}$, $\sqrt[6]{(-6)^{18}}$, $\sqrt[5]{5^{10}}$;
 b) $\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[7]{-128}$;
 c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt[7]{\frac{1}{2187}}$, $\sqrt[9]{512^{-1}}$,
 $\sqrt[4]{0,0001}$, $\sqrt[3]{-0,008}$.

E2. Să se scrie cu ajutorul radicalilor:

- a) soluția pozitivă a ecuațiilor:
 $x^3 - 216 = 0$, $x^2 = 4096$,
 $x^5 - 243 = 0$, $2x^4 - 1250 = 0$;
 b) soluția negativă a ecuațiilor:
 $3x^3 + 192 = 0$, $2x^3 = -250$, $8x^3 = -27$,
 $x^5 + 1024 = 0$, $4x^7 = -512$, $x^7 + 1 = 0$.

E3. Pentru ce valori ale lui x au loc egalitățile:

- a) $\sqrt[2]{x^2} = x$; b) $\sqrt[3]{x^3} = x$; c) $\sqrt[4]{x^8} = x^2$;
 d) $\sqrt[8]{x^8} = -x$; e) $\sqrt[5]{x^5} = -x$?

E4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie definite expresiile:

- a) $\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt[3]{3-5x}$; c) $\sqrt[4]{3x^2}$;
 d) $\sqrt[6]{-x}$; e) $\sqrt[3]{\frac{1}{x+5}}$; f) $\sqrt[5]{4x^{-2}}$;
 g) $\sqrt{2-x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}$; h) $\sqrt[4]{2x^2 + x - 3}$;
 i) $\sqrt[8]{4x^2 - 3x + 8}$; j) $\sqrt[4]{24x + 9x^2 + 16}$.

E5. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ date prin expresiile:

- a) $f(x) = \sqrt{(4-x)^2}$, $x \in [0, 6]$;
 b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-3)^3}$, $x \in \mathbb{R}$;
 c) $f(x) = 3x + \sqrt[4]{(6-3x)^4}$.

E6. Să se determine mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt[3]{\frac{7x+2}{x+5}} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

APROFUNDARE

A1. Să se determine partea întreagă a numerelor: $\sqrt{1396}$; $\sqrt[3]{45}$; $-\sqrt[3]{205}$;

$$\sqrt[4]{35}$$
; $\sqrt[4]{675}$; $\sqrt[5]{-800}$.

A2. Să se compare numerele:

- a) $[\sqrt{104}]$ și $[\sqrt[3]{625}]$;
 b) $[\sqrt[3]{-15}]$ și $[-\sqrt[4]{20}]$;
 c) $\{\sqrt{31}, 36\}$ și $\{-\sqrt{0,1225}\}$.

A3. Să se aproximeze prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 1; 0,1, respectiv 0,01 numerele: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$.

A4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie definite expresiile:

- a) $\sqrt{\frac{3-x}{x+4}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{9-x^2}}$;

c) $\sqrt{\frac{2x^2 - 6x}{x - 4}}$; d) $\sqrt{\frac{-3x^2}{x^2 - 16}} + \sqrt[3]{\frac{x}{2 - x}}$

e) $\sqrt[6]{\frac{9 - x^2}{|x|}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2 - |x|}}$

A5. Folosind semnul funcțiilor trigonometrice să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $D \subset [0, 2\pi]$;

b) $f(x) = \sqrt[4]{\cos x}$, $D \subset [0, 2\pi]$;

c) $f(x) = \sqrt[6]{1 - \sin x}$, $D \subset \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}}$, $D \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A6. Dacă $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, să se scrie sub formă restrânsă:

$$\sqrt{16(y - 2x)^2} + 2\sqrt[3]{(2y - 3x)^3} - \sqrt[4]{\left(2x - \frac{3}{2}\right)^4}$$

A7. Fie $a \in [-1, 1]$, $b \in [-3, 4]$ și

$$E = \sqrt{(a + b + 4)^2} + \sqrt[3]{(2a + b + 5)^4}$$

$$F = \sqrt{(a - 3b - 10)^2} - \sqrt[6]{(4a - b - 7)^6}$$
, iar $s = E - F$.

Alegeți varianta corectă:

a) $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $s \in \mathbb{N}$; c) $s \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$;

d) $s = -3$.

A8. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:

a) $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{(1 - x)^3}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2} \sqrt{(x - 1)^2}$;

c) $f(x) = \sqrt[4]{(x + 1)^8} + \sqrt{(x + 1)^2}$.

A9. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$ pentru care expresiile au sens:

$$E = \sqrt[n]{n+1}\sqrt{x} - 1, \quad F = \sqrt[n+1]{n}\sqrt{x} - 1.$$

A10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$

$$= \sqrt{(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + m - 2};$$

b) $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) =$

$$= \sqrt[4]{(m^2 + 3m)x^2 - 2(m + 3)x + 2}.$$

1.3. PROPRIETĂȚI ALE RADICALILOR DE ORDIN n

Folosind definiția radicalului de ordinul n dintr-un număr real și unele proprietăți ale puterilor cu exponent întreg se vor pune în evidență o serie de proprietăți specifice radicalilor.

Să amintim următoarea proprietate a puterilor cu exponent natural pe care o vom folosi în demonstrarea unor proprietăți ale radicalilor.

„Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = b^n$ dacă și numai dacă $a = b$.” (1)

▣ P1. Radicalul produsului:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \forall a, b \in [0, +\infty).$$

Demonstrație

Fie $x = \sqrt[n]{ab}$ și $y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Rezultă că $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab$,

$$y^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Așadar, $x^n = y^n$ și conform proprietății (1) enunțate mai sus se obține că $x = y$, adică $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

Dacă indicele n este impar proprietatea este adevărată pentru orice numere reale.

Exemple

a) $\sqrt[3]{(-343) \cdot 216} = \sqrt[3]{(-343)} \cdot \sqrt[3]{216} = (-7) \cdot 6 = -42;$

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16} \cdot \frac{81}{625}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$

OBSERVAȚIE

- Proprietatea P1 poate fi generalizată pentru un număr finit de numere reale $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k}.$$

P2. Radicalul unui raport:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a \in [0, +\infty), b \in (0, +\infty).$$

Demonstratie

Fie $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Rezultă că $x \geq 0, y \geq 0$ și $x^n = \frac{a}{b} = y^n$. Ca urmare $x = y$, ceea ce justifică enunțul. ■

OBSERVAȚIE

- Condițiile $a \geq 0, b > 0$ sunt esențiale când n este un număr par. Dacă n este număr impar, proprietatea P2 are loc pentru oricare numere $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}^*$.

Exemple

a) $\sqrt{\frac{169}{400}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{400}} = \frac{13}{20};$ b) $\sqrt[3]{\frac{-729}{512}} = \frac{\sqrt[3]{-729}}{\sqrt[3]{512}} = -\frac{9}{8}.$

P3. Puterea unui radical:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \forall a \in [0, +\infty), m \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstratie

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ ori}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}_{m \text{ ori}} = \sqrt[n]{a^m}. \blacksquare$$

⇒ **OBSERVAȚIE**

• Proprietatea P3 rămâne adevărată pentru $a < 0$ dacă n este număr impar.

⇒ **Exemple**

a) $(\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$; b) $(\sqrt[4]{3^2})^2 = \sqrt[4]{3^4} = 3$; c) $(\sqrt[5]{-2})^3 = \sqrt[5]{-8}$.

▣ **P4. Scoaterea unui factor de sub radical:**
 $\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \forall a \in [0, +\infty).$

Demonstratie

Într-adevăr, $\sqrt[n]{a^{mn} \cdot b} = \sqrt[n]{(a^m)^n \cdot b} = \sqrt[n]{(a^m)^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a^m \cdot \sqrt[n]{b}$. ■

⇒ **Exemple**

a) $\sqrt[3]{3^6} \cdot 2 = 3^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 9 \cdot \sqrt[3]{2}$;

b) $\sqrt[5]{3^{10}} \cdot 2 = \sqrt[5]{3^{5 \cdot 2}} \cdot 2 = 3^2 \cdot \sqrt[5]{2}$;

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^{4 \cdot 3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

▣ **P5. Amplificarea, simplificarea unui radical:**
 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \quad \forall a \in [0, +\infty), k \in \mathbb{N}^* \text{ (amplificarea)}$
 $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \forall a \in [0, +\infty), k \in \mathbb{N}^* \text{ (simplificarea)}$

Demonstratie

Într-adevăr, notând $x = \sqrt[n]{a}, y = \sqrt[nk]{a^k}$, rezultă că $x, y \geq 0$ și $x^n = a = y^n$, egalitate din care se obține că $x = y$.

Analog se poate proceda și pentru simplificarea, sau se folosește amplificarea. ■

⇒ **Exemple**

a) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$ (amplificare); b) $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2}$ (simplificare).

▣ **P6. Componerea radicalilor:**
 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \forall a \in [0, +\infty).$

Demonstratie

Într-adevăr, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \stackrel{(P5)}{=} \sqrt[mn]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n} \stackrel{(P3)}{=} \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[mn]{a}$. ■

⇒ **Exemple**

a) $\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[2]{2^6} = 2$; b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[20]{36} = \sqrt[20]{6^2} = \sqrt[10]{6}$.

▣ **P7. Compararea radicalilor:**

Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ atunci $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

Demonstratie

Într-adevăr, luând $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$, rezultă că $x^n = a$ și $y^n = b$. Din echivalența $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$ se obține $a < b$ și proprietatea este demonstrată. ■

🔗 Exemplu

• Să se compare numerele $\sqrt[3]{5}$ și $\sqrt{3}$.

Pentru comparare se aduc radicalii la același ordin folosind amplificarea radicalilor.

Se obține: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$, $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$.

Deoarece $25 < 27$, rezultă că $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$, deci $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

1.4. OPERAȚII CU RADICALI

Examinând proprietățile radicalilor de ordinul n , se constată că ele descriu totodată anumite reguli de calcul cu radicali. Astfel, pentru $a, b \in [0, +\infty)$ și $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ avem:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, sau mai general, $\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$,

$a_i \in [0, +\infty)$, $i = \overline{1, k}$; (înmulțirea radicalilor)

2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$; (împărțirea radicalilor)

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$; (ridicarea la

putere)

4. $\sqrt[n]{a^{nk}} \cdot b = a^k \cdot \sqrt[n]{b}$; (scoaterea unui factor de

sub radical)

5. $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$; (înmulțirea unui radical cu

un număr pozitiv – introducerea factorilor sub radical)

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; (extragerea rădăcinii de ordin

m dintr-un radical)

Unele reguli de calcul cu puteri și radicali au fost folosite încă din secolul al XIV-lea.

AL KASI a stabilit regula aducerii radicalilor la același ordin și folosea formule de tipul:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m}.$$



➔ **OBSERVAȚII**

- Dacă m și n sunt numere impare, atunci condiția de pozitivitate a lui a și b nu mai este necesară.
- Dacă la operațiile 1. și 2. se folosesc radicali de ordine diferite, mai întâi se aduc radicalii la același ordin prin operația de amplificare. Ordinul comun se alege de obicei ca fiind cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor.

- ☒ 1. Să se calculeze, scriind rezultatul sub formă mai simplă:
a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8}$; **b)** $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{4}$.

Soluție

a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = 4\sqrt[6]{2^5}$;

b) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^4} : \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{4} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2}$.

- ☒ 2. Să se introducă factorii sub radical:

a) $4\sqrt{5}$; **b)** $-3\sqrt[3]{2}$; **c)** $-3\sqrt[4]{2}$; **d)** $a\sqrt[4]{b}$.

Soluție

a) $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5}$; **b)** $-3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 2}$; **c)** $-3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{3^4 \cdot 2}$;

d) $a\sqrt[4]{b} = \begin{cases} \sqrt[4]{a^4 \cdot b}, & a \geq 0 \\ -\sqrt[4]{(-a)^4 \cdot b}, & a < 0 \end{cases}$.

- ☒ 3. Să se scoată factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{(-2)^5 \cdot 3^4}$; **b)** $\sqrt[4]{a^6}$; **c)** $\sqrt[5]{a^6}$.

Soluție

a) $\sqrt[3]{(-2)^5 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3^3 \cdot (-2)^2 \cdot 3} = -2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{12} = -6\sqrt[3]{12}$;

b) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^2} = |a| \sqrt[4]{a^2} = |a| \cdot \sqrt{|a|}$, $a \in \mathbb{R}$;

c) $\sqrt[5]{a^6} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a} = a\sqrt[5]{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

⇒ OBSERVAȚII

- În ceea ce privește adunarea radicalilor nu există proprietăți speciale ale acestora.

Trebuie remarcat că $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

- Dacă $a < 0$, $b \geq 0$, atunci $a^{2n}\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^{2n}b}$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b}, & n \text{ impar} \\ |a|\sqrt[n]{b}, & n = \text{par}, b \geq 0 \end{cases}$.

- Reamintim că media geometrică a două numere pozitive a_1, a_2 a fost definită ca fiind $m_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

În general, media geometrică a n numere pozitive a_1, a_2, \dots, a_n este:

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

1.5. RAȚIONALIZAREA NUMITORILOR

Să considerăm expresiile $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}$ și $\frac{1}{\sqrt[3]{5-\sqrt[3]{4}}}$ care prezintă radicalul la numitori. Se pune problema scrierii acestor expresii astfel încât să nu mai conțină radicalul la numitori. Cum se va proceda?

❖ DEFINIȚII

- Operația de eliminare a radicalilor de la numitorul unei fracții se numește **raționalizarea numitorilor**.
- Două expresii care conțin radicali se numesc **expresii conjugate** dacă produsul lor este o expresie care se scrie fără radicali.

Așadar, pentru a raționaliza numitorul unei fracții se amplifică fracția cu expresia conjugată expresiei de la numitor.

Operația de raționalizare a numitorilor se va exemplifica pe câteva cazuri tipice de numitori.

1. Numitorul este un radical.

Dacă numitorul fracției este $\sqrt[n]{a^k}$, $a > 0$, $k < n$, atunci fracția se amplifică cu $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ și numitorul va fi $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$.

☞ **Exemplu:** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$

2. Numitorul este de forma $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$, $a > 0$, $b > 0$.

Deoarece expresiile $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sunt conjugate și are loc egalitatea $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, fracția se amplifică cu $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$.

☞ **Exemplu:** $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

3. Numitorul este de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$, $a, b, c > 0$.

În acest caz eliminarea radicalilor de la numitor se realizează prin amplificări succesive cu expresii conjugate reducând problema la cazul 2.

☞ Exemplu

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{2 \left[(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + \sqrt{2} \right]}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 2} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})}{2(3 + \sqrt{15})} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(3 - \sqrt{15})}{(3 + \sqrt{15})(3 - \sqrt{15})} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(3 - \sqrt{15})}{9 - 15} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{15} - 3)}{6} \end{aligned}$$

URDIS | We know

4. Numitorul este de forma $(\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b})$ sau $(\sqrt[n]{a^2} \pm \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^2})$.

În acest caz se folosesc următoarele perechi de expresii conjugate:

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^2}) = a - b$$

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^2} - \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^2}) = a + b$$

Exemple

a)
$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 4} + \sqrt[3]{4^2}}{5 - 4} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}.$$

b)
$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \frac{2(\sqrt[3]{3} - 1)}{3 - 1} = \sqrt[3]{3} - 1.$$

5. Numitorul este de forma $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})$ sau

$(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})$ respectiv $(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})$ sau

$(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})$ pentru n impar.

În acest caz se folosesc următoarele perechi de expresii conjugate:

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2} \cdot b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b,$$

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2} \cdot b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b, n \text{ impar.}$$

Exemple

a)
$$\frac{1}{\sqrt[4]{3} - 1} = \frac{\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3^2} + \sqrt[4]{3} + 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1}{2}.$$

b)
$$\frac{1}{\sqrt[5]{2^4} - \sqrt[5]{2^3} + \sqrt[5]{2^2} - \sqrt[5]{2} + 1} = \frac{\sqrt[5]{2} + 1}{2 + 1} = \frac{\sqrt[5]{2} + 1}{3}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze:

- a) $\sqrt[3]{27 \cdot 4^6}$; b) $\sqrt[4]{625 \cdot 81}$; c) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^{-5}}$;
 d) $\sqrt[4]{256 \cdot 4096}$; e) $\sqrt[21]{128 \cdot 3^{14}}$;
 f) $\sqrt[12]{343^3 \cdot 49^5 \cdot 7^5}$.

E2. Să se calculeze:

- a) $\sqrt{\frac{784}{1225}}$; b) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$; c) $\sqrt{\frac{1}{6^4} \cdot \frac{81}{625}}$;
 d) $\sqrt{\frac{-216}{343} \cdot \frac{1331}{8}}$; e) $\sqrt[14]{\frac{729 \cdot 81^3 \cdot 9^5}{64^2 \cdot 32^3 \cdot 2}}$.

E3. Să se calculeze:

- a) $(\sqrt[3]{2})^6$; b) $\left(\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2$; c) $\left(\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)^{10}$;
 d) $\sqrt[3]{4\sqrt{256}}$; e) $\sqrt{\sqrt{1296x^8y^{32}}}$.

E4. Să se introducă factorii sub radical:

- a) $3\sqrt{5}, 2\sqrt[3]{2}, -2\sqrt{5}, 4\sqrt[4]{3}, -3\sqrt[5]{4}$;
 b) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{27}{8}}, -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{32}{9}}$.